

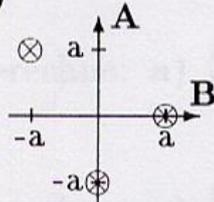
4.4 Produkte von Mengen

1. Gegeben seien die Mengen $X = \{x_1, x_2\}$ und $Y = \{y_1, y_2\}$. Bestimme $X \times Y$ und $Y \times X$.
2. Wieviel Elemente enthält das Produkt der Mengen $\{a, b, c, d, e\}$ und $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

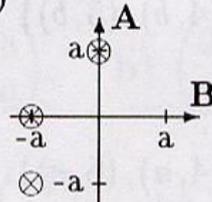
4.5 Relationen und Abbildungen

1. Welches Schaubild definiert eine Relation auf $B \times A$, die keine Abbildung ist? $A = \{-a, 0, a\}$, $B = \{-a, 0, a\}$, ($a \in \mathbb{N}$).

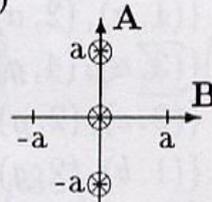
a)



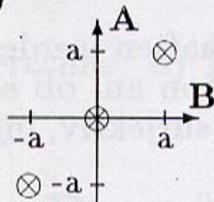
b)



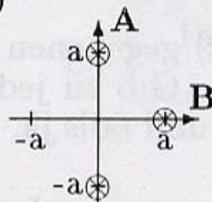
c)



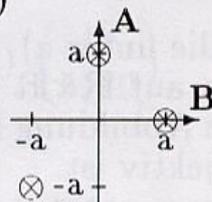
d)



e)



f)



2. Gegeben seien die folgenden Relationen in \mathbb{N} :

$$R_1 = \{(x, y) \mid (x - y) \text{ ist eine gerade positive Zahl}\};$$

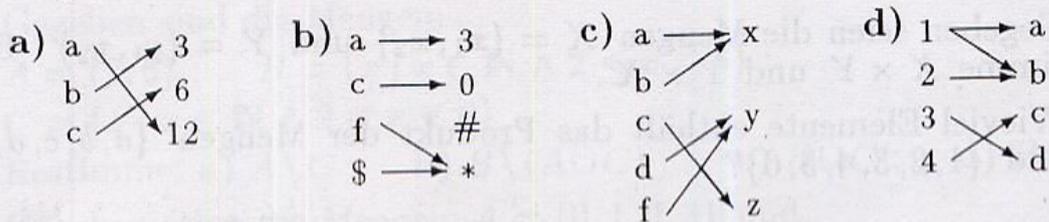
$$R_2 = \{(x, y) \mid \text{bei Division durch 5 liefern } x \text{ und } y \text{ den gleichen Rest}\};$$

$$R_3 = \{(x, y) \mid x \leq y \text{ oder } y \leq x\};$$

$$R_4 = \{(x, y) \mid x < y\}.$$

Welche der Relationen sind Äquivalenzrelationen?

3. Welche Eigenschaften einer Abbildung f sind notwendig, damit eine Umkehrabbildung angegeben werden kann? Welche sind hinreichend, welche notwendig und hinreichend? Die Abbildung f muss:
- a) eineindeutig, b) surjektiv, c) bijektiv, d) injektiv sein.
4. Gegeben sind die folgenden Zuordnungen:



Gib jeweils an, ob es sich um eine Abbildung handelt und von welchem Typ diese ist.

5. Gegeben sind die Mengen $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $N = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ sowie die folgenden Relationen $R: M \times N$:
- a) $R = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, d), (4, e), (5, f)\}$;
 b) $R = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, b)\}$;
 c) $R = \{(3, a), (4, g)\}$;
 d) $R = \{(2, c), (2, g), (5, f)\}$;
 e) $R = \{(1, b), (2, g), (3, f), (4, a), (5, c)\}$.

Welche Relationen sind Abbildungen? Welche Abbildungen sind injektiv?

6. Durch die unter a), b) und c) gegebenen Eigenschaften werden Relationen auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert. Gib zu jeder Relation an, ob es sich um eine Abbildung handelt, und falls ja, ob diese surjektiv, injektiv oder bijektiv ist.
- a) $x - y = \text{const.}$; b) $y^2 = x$; c) $e^x - y = 0$.

7. Gegeben sind drei Mengen:

$A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und $C = \{x, \beta, y, z, u\}$ sowie die folgenden Abbildungen:

$f_1: A \rightarrow B$ mit $f_1(a) = 2, f_1(b) = 2, f_1(c) = 6, f_1(d) = 1,$
 $f_1(e) = 6$;

$f_2: B \rightarrow C$ mit $f_2(3) = \beta, f_2(4) = z, f_2(5) = y, f_2(7) = x$;

$f_3: B \rightarrow C$ mit $f_3(1) = y, f_3(2) = x, f_3(6) = u$.

- a) Welche zusammengesetzte Abbildung ist definiert?

(1) $f_3 \circ f_1: A \rightarrow C$ (2) $f_2 \circ f_1: A \rightarrow C$;

- b) Gib diese Abbildungen in der gleichen Form an, in der f_1, f_2 und f_3 angegeben sind.